Проблема: Какими должны быть три заданных угла, чтобы они могли быть углами одного треугольника?

Учащимся предлагается 6 углов (не именно таких, как я изобразил – надо подобрать, чтобы было несколько подходящих троек, но в изображении обязательно одна сторона горизонтальна и вершина слева):

Найдите среди них тройки углов, которые могут быть углами одного треугольника.

|  |  |
| --- | --- |
| Действия | Методологический комментарий |
| Учитель: С чего вы предложили бы начать решение этой задачи? | Призыв к выработке плана решения задачи |
| Ожидаемый ответ: надо перебрать все тройки углов и попытаться для каждой из них составить треугольник. | 1) Метод полного перебора – один из наименее эффективных, и это важно демонстрировать. Этот метод по существу является разновидностью метода проб и ошибок, который всего лишь позволяет сформировать множество верных вариантов, но не дает при своей реализации никаких подходов к анализу ситуации. Методы анализа вынуждены привноситься извне в уже готовом виде, что не отвечает дидактическим целям данного задания.  2) Данное предложение не решает главного в проблеме, поставленной учителем: что делать после того, как выбраны 3 угла? |
| Учитель: Давайте обдумаем это предложение.  Во-первых, как бы вы оценили, сколько троек углов придется рассмотреть? (После нескольких вариантов ответа, полученных от школьников, учитель сообщает, что их 20). Мы, конечно, можем распределить их между вами, дав каждому по одной тройке углов, а лучше по две, чтобы проверить правильность получаемого ответа. Но всё равно остается следующий вопрос. Допустим, мы выбрали какие-то три угла. Как дальше нам узнать, можно ли из них составить треугольник? |  |
| Ожидаемый ответ: надо попробовать сначала приложить два угла так, чтобы одна из сторон у них была общая, но направлены они были в противоположные стороны, а две другие оказались в одной полуплоскости.  Учитель: Это хорошее предложение. Значит, нам требуется рассматривать пары углов. Таких пар у нас 15. Пусть каждый проведет построение для трёх пар.  (Идет распределение, какие три пары проверяет каждый из школьников, идет выполнение работы) | В ходе проверок учащиеся обнаруживают, что даже не для каждой пары углов можно построить подходящий треугольник. По существу в исходной задаче выделена подзадача для двух углов. Этот процесс выделения подзадачи должен быть отрефлексирован учащимися в общем виде, т.е. с осознанием общего подхода, примененного в ходе решения данной задачи. |
| Учитель (после окончания построений и обсуждения, у кого получились треугольники, а у кого нет): Давайте обсудим, какую задачу мы сейчас решали и какие выводы можно сделать.  Сколько углов мы пытались использовать, чтобы сконструировать треугольник?  Учащиеся: два.  Учитель: Значит, мы решали задачу… Сформулируйте сами.  Ожидаемый ответ:  Какими должны быть два заданных угла, чтобы они могли быть углами одного треугольника?  Учитель: Чем она отличается от исходной задачи?  Ответ: числом углов.  Учитель: Вот видите, оказалось полезным в качестве первого шага рассмотреть задачу с меньшим числом тех объектов, для которых нужно учитывать выполнение условий задачи. В нашем случае каким было условие?  Ответ: углы должны быть углами одного треугольника.  Учитель: И какой можно сделать вывод? Любые ли два угла могут одновременно оказаться углами одного треугольника?  Ожидаемый ответ: Нет. Тупой и прямой углы не могут быть углами одного треугольника.  Ожидаемая дискуссия о том, что тупой угол и не с каждым острым углом может присутствовать в одном треугольнике.  Учитель: Верно. Значит, надо продолжить наше исследование. Как теперь, используя уже имеющуюся информацию, узнать, какой угол из тех, которые нам даны, может быть третьим углом треугольника?  Ожидаемый ответ: надо сравнить оставшиеся углы с третьим углом в треугольнике.  (Учащиеся выполняют работу; составляют краткий отчет, каким двум углам нашелся третий угол из числа заданных, а каким нет.) | 1) Здесь получает развитие такое УУД как *рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности*,состоящее в выделении и осознание учащимся того, что уже достигнуто и что еще нужно сделать,  2) Формируется метапредметное умение выделения подзадач путем рассмотрения конфигураций с меньшим числом объектов, удовлетворяющим заданным требованиям. |
| Учитель: Какой вывод можно сделать?  Ожидаемый ответ: Каждым двум заданным углам соответствует только один третий угол треугольника.  Учитель: А как вам кажется, зависит ли величина третьего угла от размеров треугольника? Может быть, в большом треугольнике она будет больше, а в маленьком меньше?  (Может возникнуть дискуссия. А может быть высказано какое-либо единое мнение).  Учитель: Давайте проверим.  (Учащиеся строят треугольники разных размеров с двумя заданными углами и убеждаются, что третий угол получается всегда одной и той же величины.) | 1) Анализ результатов, формулирование вывода (что соответствует развитию УУД – осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме).  2) Постановка и формулирование проблемы на основании полученных результатов. |
| Учитель: Что ж, у нас все время получается, что третий угол одинаков. Этого достаточно, чтобы утверждать, что так будет для треугольников всевозможных размеров и с любыми двумя заданными углами?  (В случае наличия у учащихся разных точек зрения или даже положительного ответа учитель может продолжить: «Разве мы можем рассмотреть все возможные случаи?» Однако это далеко не первая задача на доказательство, так что весьма вероятно сразу получить отрицательный ответ).  Учитель: Значит, что нам необходимо сделать?  Ожидаемый ответ: Доказать, что если у двух треугольников два угла соответственно равны, то и третьи углы тоже равны. | Осуществляется переход от эмпирического знания к теоретическому обоснованию |
| (В совместном обсуждении выстраивается доказательство: в одной паре равных углов они совмещаются, тогда для вторых углов получается картинка, изображенная на рисунке. Полезно, чтобы, оставляя один угол № 2 неподвижным, другой школьники подвигали вдоль общей стороны. Получаются две прямые и секущая, для которых соответственные углы равны, следовательно, эти прямые параллельны. А тогда равны и третьи углы, как соответственные при двух параллельных и секущей.) | Коммуникация в выдвижении гипотез и шагов доказательства. |

1 2 2

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель: Мы доказали, что третий угол полностью определяется двумя другими углами треугольника. А можно ли установить зависимость между величинами этих углов. | Переход от установления собственно факта существования зависимости к выявлению математического соотношения: УУД – преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта (в знаково-символической форме) . |

Вот только здесь, Иван, наступает то, что фактически у Вас заложено.

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель: И снова, мы не можем испробовать все возможные треугольники. Значит, наше открытие, что сума величин углов треугольника равна 180°, нуждается в доказательстве. Не подсказывают ли нам проведенные эксперименты, как получить такое доказательство? Что мы в них делали? (Перемещали один из углов вдоль общей стороны.)  (Возможно, кто-нибудь догадается переместить «подвижный» угол №2 так, чтобы его вершина совместилась с вершиной угла № 1. Получится следующий рисунок.) | Снова переход от эмпирических наблюдений к теоретическому обоснованию.  Идея перемещения угла №2 в вершину угла № 1, конечно, является креативной. Тем не менее, она является воплощением важного метапредметного метода исследования – рассмотрения положения объектов в экстремальных (возможно, вырожденных) ситуациях. В данном случае при «экстремальном» перемещении угла № 2 влево треугольник исчез – выродился в точку, – но оказалось, что это полезно для решения задачи. |

2 1 2

|  |  |
| --- | --- |
| (Теперь третий угол треугольника является накрест лежащим углом к «непомеченному» углу, располагающимся при вершине угла № 1. Они равны по соответствующей теореме. Но три угла при вершине угла № 1 в сумме образуют развернутый угол, величина которого180°). |  |
| Учитель: Помните, мы в наших экспериментах обнаружили, что у треугольника не может быть одновременно тупой угол и прямой? Мы теперь можем это обосновать?  (Учащимися проводится обоснование) | Снова рефлексия результата; рассмотрение ранее полученной информации с точки зрения новых сведений. |
| Учитель: Решим теперь такую задачу. Даны 6 углов величины которых 27°, 55°, 112°, 41°, 32° и 36°. Какие тройки углов могут быть углами одного треугольника?  Как вы думаете, нужно ли построить эти углы, чтобы решить эту задачу?  Ожидаемый ответ: Нет, нам достаточно вычислять суммы.  (Учащиеся решают эту задачу.) | Построение математической модели исходной задачи полностью завершено. Теперь эта модель применяется для решения задач в свернутом виде. Важный метапредметный методологический этап: от исследования через построение модели к её применению в решении задач. |
| Учитель: Вы, конечно, знаете, что плоской нашу Землю можно считать только, когда мы рассматриваем сравнительно небольшой участок поверхности. А что будет, если бы мы на поверхности Земли строили очень большие треугольники? Будем считать, что наша Земля – это шар. Конечно, сначала надо понять, что такое сторона треугольника. Как и для плоскости, это должна быть линия кратчайшего пути между точками. Как вы думаете, какая это линия? | Понимание, что всякая построенная модель адекватно отражает действительность только в пределах сделанных предположений и допущений – важная метапредметная и методологическая позиция. |

Вот здесь бы пригодился пространственный аналог ЖГ. Дети бы попробовали разные варианты и убедились бы, что это должна быть дуга окружности центрального сечения. Аналитическое доказательство им не по силам.

|  |  |
| --- | --- |
| Учитель: Представьте, что мы взяли две точки на экваторе и в каждой из них провели меридиан. Какой угол между экватором и меридианом?  Ответ: прямой.  Учитель: Но ведь меридианы у нас пересеклись на Северном полюсе. Получился треугольник с двумя прямыми углами.  Учитель: А скажите, угол между меридианами всегда один и тот же? Т.е. можно ли, как на плоскости, утверждать, что два угла треугольника однозначно определяют его третий угол?  Ответ: нельзя.  Учитель: А от чего зависит величина этого угла?  Ожидаемые ответы: от размеров треугольника, от длины противолежащей стороны и т.п. |  |
| Учитель: Видите, как меняются свойства фигур в зависимости от того, на какой поверхности мы их рассматриваем. Но мы дальше продолжим изучать свойство фигур на плоскости, а те, кому интересна геометрия фигур на других поверхностях, смогут узнать об этом, обучаясь уже в университете. |  |